MÉTODOS NUMÉRICOS Y TECNOLOGÍAS EN LA RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS: RELATO DE UNA EXPERIENCIA

María Eva Ascheri, Rubén A. Pizarro, María E. Culla y Mei Yi Lee
Universidad Nacional de La Pampa. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Argentina
mavacheri@exactas.unlpam.edu.ar, ruben@exactas.unlpam.edu.ar

Resumen. Considerando que la informática ocupa un lugar importante en nuestra sociedad y resulta útil en el campo educativo, y como una acción para enriquecer y fortalecer la formación de los estudiantes, les dictamos un Taller sobre "Introducción al cálculo numérico de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's)", en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UNLPam, Argentina.

El objetivo es centrarse en actividades que favorezcan el conocimiento, desarrollo y valoración de las técnicas numéricas y herramientas tecnológicas que pueden emplearse para la resolución de problemas con EDO's.

Presentamos las características del Taller y un relato de la experiencia realizada.

Palabras clave: métodos numéricos, tecnologías, experiencia

Abstract. Whereas computer science has an important place in our society and is useful in education, and as a move to enrich and strengthen the training of students, they dictate a workshop on "Introduction to numerical calculation of ordinary differential equations (ODE's)", Faculty of Natural Sciences of UNLPam, Argentina.

The aim is to focus on activities that support the knowledge, development and evaluation of numerical techniques and technological tools that can be used for problem solving ODE's.

We present the characteristics of the Workshop and an account of the experience acquired.

Key words: numerical methods, technologies, experience

Introducción

Aprovechando las alternativas que ofrece la evolución tecnológica para propiciar cambios en el enfoque de enseñar y aprender matemática, teniendo en cuenta que la informática ocupa un lugar cada vez más importante en nuestra sociedad y resulta de gran utilidad en el campo educativo, y como una acción para enriquecer y fortalecer la formación de nuestros estudiantes, les dictamos un Taller sobre "Introducción al cálculo numérico de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's)", en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa, Argentina. Este Taller estuvo dirigido a aquellos estudiantes que cursaron o estuvieran cursando la asignatura Cálculo Numérico/Análisis Numérico. Su objetivo fue centrarse en actividades que favorecieran el conocimiento, desarrollo y valoración de las técnicas numéricas que pueden emplearse para la resolución de problemas relacionados con EDO's, conjuntamente con el uso de herramientas tecnológicas. Este tema no sólo es una de las partes más bellas de las matemáticas, sino que también es una herramienta esencial para modelar muchas situaciones físicas, demostrando su utilidad en ecología, ingeniería, entre otras ciencias.

Alemán de Sánchez (1999), sostiene que el uso de la computadora en sus diversas modalidades ofrece, sobre otros métodos de enseñanza, ventajas tales como:

- Participación activa del alumno en la construcción de su aprendizaje

- Interacción entre el alumno y la máquina
- La posibilidad de dar una atención individual al estudiante
- La posibilidad de crear micromundos que le permiten explorar y conjeturar
- Permite el desarrollo cognitivo del estudiante y el
- Control del tiempo y secuencia del aprendizaje por el alumno
- Con la retroalimentación inmediata y efectiva, el alumno puede aprender de sus errores.

Por ello, con el desarrollo de este Taller quisimos aportar aspectos numéricos relativos a este contenido, haciendo especial hincapié en mostrar y demostrar la necesidad de utilizar la computadora con un software adecuado a la problemática a resolver.

Marco Teórico

De acuerdo a Rivera Porto (1997), el uso de la computadora en la educación puede enfocarse a tres áreas de aprendizaje: a) aprender de, o desde, las computadoras, b) aprender con las computadoras, c) aprender sobre las computadoras.

El aprender desde las computadoras es el aprendizaje conocido como instrucción asistido por computadora. El aprendizaje desde las computadoras puede involucrar el uso de tutoriales, simuladores o alguna forma de interactividad.

Aprender con las computadoras significa usar a la computadora como una acompañante en las tareas o actividades escolares. Cuando se aprende "con" las computadoras, las funciones cotidianas de éstas se incorporan a la vida académica.

Aprender sobre las computadoras es conocer acerca del hardware y software de éstas. Este tipo de aprendizaje se puede convertir en una oportunidad para facilitar los procesos cognitivos del usuario, bajo un enfoque constructivista.

En este Taller, el uso de la computadora está enfocado al aprendizaje a través de, o desde la computadora.

Las formas o modalidades citadas por Rivera Porto (1997) de la enseñanza concreta asistida por computadora son entre otras tutorial, ejercitación y práctica, juegos y simulaciones.

Se utilizó la modalidad de ejercitación y práctica ya que se trata de que los participantes adquieran una habilidad sobre algo realizando un ejercicio únicamente, pues el contenido se conoce, se da en clase.

También se ha usado la modalidad de simulación según la cual se ensayan en la computadora experimentos de laboratorio de física, química y otros, dando distintas hipótesis y obteniendo resultados, gráficas comparativas y demás.

Por último, se ha utilizado la modalidad de herramientas pre-programadas, íntimamente relacionada con el descubrimiento y la simulación. El objetivo de estas formas es facilitar la creatividad del participante, la capacidad de generación y de entender-haciendo, además de estimular el pensamiento crítico. Esto es, a través de la ejercitación y práctica, en conjunción con las simulaciones, herramientas y descubrimiento, se trata que el participante pueda deducir algunas cuestiones de algún fenómeno físico, químico, biológico, por ejemplo.

Más precisamente, con el desarrollo de esta experiencia de acuerdo a las modalidades antes citadas, se ha pretendido favorecer el conocimiento, desarrollo y valoración de las técnicas numéricas y herramientas tecnológicas que pueden emplearse para la resolución de problemas relacionados con ecuaciones diferenciales ordinarias.

Metodología

En este Taller, que lo dictamos en la modalidad semi-presencial, utilizamos como entorno de aprendizaje virtual la aplicación Moodle para complementar el aprendizaje presencial. Además permitió la disponibilidad del material para el desarrollo y seguimiento del Taller.

Se desarrollaron actividades individuales y grupales, las cuales fueron coordinadas y supervisadas por los docentes a cargo del Taller, autores de este trabajo. Los participantes contaron con un Cuaderno (Ascheri, Pizarro, Culla y Lee, 2012) sobre la temática a abordar en el Taller y un grupo de programas realizados en Octave, todo ello de edición propia.

El cupo para el Taller fue de 20 participantes y se realizó en noviembre y diciembre de 2012. La carga horaria fue de 40 horas reloj: 3 semanas de taller, 2 semanas para preparar un proyecto final, 1 semana para su presentación y exposición. Incluyeron 8 encuentros presenciales de 2 horas cada uno. Se planearon las siguientes instancias de evaluación:

- Participación en clase.
- Trabajo individual.
- Trabajo grupal.
- Presentación y exposición de un proyecto final.

Se dieron certificados de asistencia a los estudiantes que fueron al 80% de los encuentros presenciales y de aprobación a los que además, presentaron y expusieron un proyecto final.

Las herramientas informáticas y las técnicas numéricas que usamos son, respectivamente, la computadora y el software Octave, y los métodos numéricos clásicos de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (Chapra y Canale, 2007; Maron y López, 2006; Mathews y Fink, 2000).

Detallamos a continuación los objetivos que nos planteamos alcanzar cuando propusimos este Taller titulado "Introducción al cálculo numérico de las EDO's" y los bloques temáticos correspondientes (Ascheri *et al*, 2012; Chapra y Canale, 2007; Edwards y Penney, 1994; Maron y López, 2006; Mathews y Fink, 2000).

Objetivos

Objetivos generales

- Introducir a los estudiantes en el estudio de los métodos numéricos para resolver EDO's.
- Proporcionar las herramientas para la solución de problemas que se relacionan con las EDO's, y que a menudo son imposibles de resolver analíticamente.
- Promover la comprensión de la importancia de los métodos numéricos en la resolución de problemas que involucren EDO's, utilizando la computadora.
- Brindar herramientas teóricas y prácticas para la elaboración de un proyecto final que incluya las distintas técnicas numéricas analizadas en el Taller.

Objetivos particulares

- Conocer y comprender las fórmulas de los métodos numéricos para resolver EDO's.
- Comprender la diferencia entre los errores de truncamiento locales y globales y cómo estos errores influyen en la exactitud de los métodos.
- Conocer el orden y la dependencia de los tamaños de paso de los errores de truncamiento para todos los métodos analizados.
- Ser capaz de reducir una ecuación diferencial ordinaria de n-ésimo orden a un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden.
- Conocer la diferencia entre los métodos de pasos múltiples y de un solo paso.
- Aplicar los métodos numéricos a diversas situaciones problemáticas.

Bloques temáticos

- Problema de valor inicial en ecuaciones diferenciales ordinarias: Introducción. Interpretación geométrica. Constante de Lipschitz. Problemas.
- Métodos de un solo paso: Métodos de la serie de Taylor, de Euler, de Heun, de Runge-Kutta y

de Runge-Kutta-Felberg. Problemas.

- Sistemas de ecuaciones diferenciales: Métodos de Euler y de Runge-Kutta de orden cuatro. Problemas.
- Métodos de resolución de ecuaciones diferenciales de orden superior: Ecuaciones diferenciales de segundo orden y de orden superior. Problemas.
- Métodos de pasos múltiples: Métodos de Adams-Bashforth-Moulton, de Milne-Simpson y de Hamming. Problemas.

La estrategia utilizada para el análisis de cada uno de estos temas ha sido la de combinar la enseñanza tradicional y las técnicas grupales de aprendizaje activo, usando la computadora con el software pertinente como herramienta colaboradora de los trabajos a realizar, esto es, aprender desde la computadora (Rivera Porto, 1997).

Las actividades del Taller, de las cuales presentamos una de ellas en este trabajo, están centradas en la utilización de métodos numéricos y la computadora como una herramienta para abordar situaciones problemáticas contextualizadas en la realidad, brindando la posibilidad de encontrar nuevas formas de comprender y afianzar los conocimientos sobre EDO's. Pensamos que, de esta manera, se contribuye a lograr un aprendizaje más significativo y a resignificar los conceptos de esta temática en los estudiantes.

Actividad. Nos proponemos:

- Ilustrar el uso de los métodos de Euler y de Heun.
- Graficar y comparar las soluciones obtenidas.
- Probar y validar los programas disponibles.
- Comparar las aproximaciones obtenidas y formular una conclusión.

Trayectoria de una pelota. Supongamos que una pelota es lanzada directamente hacia arriba a partir del suelo con velocidad inicial .Si no hubiera resistencia del aire, podría llegar a una altura máxima de 400 pies en 5 segundos, entonces cae regresando al suelo en otros 5 segundos. Pero consideren, más real, que el efecto de la resistencia del aire acelera la pelota

a) Utilizando los programas, determine las aproximaciones de Euler y de Heun (con $h = 0.1$) a la velocidad $v(t)$ y altura $s(t)$ de la pelota, a fin de responder:

1) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota?

2) ¿En qué tiempo *t* alcanza dicha altura?

3) ¿Cuánto tiempo le tomará a la pelota caer de su altura máxima de regreso al suelo, y con qué velocidad chocará en el mismo?

b) Para cada caso, dibuje su solución en una misma gráfica.

c) De acuerdo a los resultados obtenidos, formule una conclusión.

A continuación, mostramos parte de uno de los proyectos finales desarrollado por un grupo de estudiantes.

Proyecto final. Mediante el siguiente trabajo, se analizan las aplicaciones de los distintos métodos estudiados en el taller para la resolución de un problema con valor inicial, evaluando el error absoluto que se obtiene al aplicar cada método. La resolución se realiza analíticamente y con el software Octave con métodos numéricos diseñados para la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias de un paso y de pasos múltiples.

Entre los métodos de un paso, se estudian los métodos de Euler, de Heun, de la Serie de Taylor, de Runge-Kutta y de Runge-Kutta-Felberg. Entre los métodos de pasos múltiples, se estudian los métodos de Adams-Blashforth-Moulton, Milne-Simpson y Hamming.

Problema de mezclas. En el instante , un tanque contiene libras (lb) de sal disueltas en 100 galones (gal) de agua. Supóngase que al tanque está entrando agua que contiene ¼ lb de sal por galón, a razón de 3 gal/min, y que la solución bien revuelta está saliendo del tanque con la misma rapidez. Encontrar la expresión que hay en el tanque en el instante y la concentración de sal en .

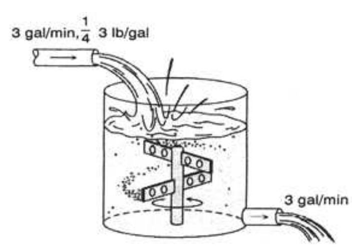

Figura 1. Tanque que contiene a una mezcla de sal y agua

Solución. La razón de cambio de la sal en el tanque en el instante *t*, $Q'(t)$, debe ser igual a la razón a la que la sal entra al tanque menos la razón a la que sale. La razón a la que la sal entra es ¼ lb/gal multiplicado por 3 gal/min. La razón a la que la sal sale es $Q(t)/100$ lb/gal multiplicado por 3gal/min;

por lo tanto,

es la ecuación diferencial que rige este proceso, donde fueron omitidas las unidades de medida. Esta es lineal y su solución general es

donde la constante arbitraria *c* queda determinada por la condición inicial

Debe tomarse , de donde,

El segundo término del segundo miembro de esta ecuación representa la porción de la sal original que resta en el tanque en el instante *t*. Este término se hace muy pequeño con el transcurso del tiempo, a medida que la solución original se extrae del tanque. El primer término del segundo miembro da la cantidad de sal que hay en el tanque en el instante *t* debido a la acción de los procesos de flujo. A medida que *t* crece, este término tiende al valor constante de 25 (lb). Físicamente, este es el valor límite de *Q*, a medida que la solución original en el tanque se reemplaza cada vez más por la que entra con una concentración de ¼ lb/gal. La ecuación que debemos analizar entonces, es la siguiente:

El valor exacto de la solución queda determinado por

9.507256424348960

Los métodos numéricos de un solo paso calculan la solución en los puntos , k=1, 2, ... siendo *h* el tamaño de paso, que en este desarrollo se varía para comparar los niveles de exactitud. En general, los métodos de un paso responden al siguiente esquema:

*Valor actual = valor anterior + pendiente*tamaño del paso*

donde aproximamos el valor de la pendiente mediante distintas estimaciones para extrapolar hacia un valor a partir de uno anterior .

Los métodos de pasos múltiples se basan en la extrapolación a un próximo valor a partir de los anteriores en forma simultánea, que pueden hallarse inicialmente con métodos de un paso. El concepto en el que se basan estos métodos es que la curvatura de un conjunto de aproximaciones a la solución da un indicio de la trayectoria en general de la solución.

En cualquier caso, el error absoluto de cada aproximación queda determinado por la diferencia entre el resultado exacto y el aproximado.

Haremos los cálculos con tamaño de paso h = 0.5, 0.1. El valor exacto es 9.507256424348960.

En la Tabla 1, se muestran los resultados hallados con cada método para visualizar la exactitud alcanzada por cada uno:

Método	Paso h	Resultado	Error absoluto
Euler	0.5	9.524852	
	0.1	9.510749	
Heun	0.5	9.507168	
	0.1	9.507253	
Taylor	0.5	9.507256755095234	
	0.1	9.507256426969645	
Runge-Kutta 4	0.5	9.507256	
	0.1	9.507256	
Runge-Kutta-Felberg	0.5	9.507256424504551	
	0.1	9.507256424349201	
Adams-Blashforth-Moulton	0.5	9.507256132047823	
	0.1	10.055030176582473	
Milne-Simpson	0.5	9.507256067981595	
	0.1	9.855696587081075	
Hamming	0.5	9.507256145370317	
	0.1	10.036331485605468	

Tabla 1. Resultados obtenidos aplicando distintos métodos para resolver la EDO

De la Tabla 1, se observa que los métodos de un paso como Euler y Heun son más precisos cuando se aumenta el tamaño de paso; de manera similar que con el método de Taylor pero siendo éste más preciso. Para el método de Runge-Kutta de orden cuatro no se logró mayor precisión, pero brinda un resultado como el de Taylor. Estos últimos son más precisos con un error absoluto de varios órdenes menor que los dos primeros. El método más preciso entre los de un paso es el de Runge-Kutta-Felberg y aun más con un tamaño de paso reducido, de 0.1, donde casi se obtuvo la solución exacta. Como complemento, se calcula la aproximación con paso 0.001 con este método, obteniéndose **9.507256424348958** con un error absoluto de 1.7764×10^{-15}. Sin lugar a dudas, la mejor aproximación que podemos obtener a la solución exacta, comparada con los demás métodos.

En cuanto a los métodos de pasos múltiples con un tamaño de paso 0.5 dan buenas aproximaciones, pero el error absoluto se dispara cuando se usa un paso menor de 0.1.

En conclusión, entre los métodos de un paso, el de Runge-Kutta-Felberg proporciona una buena aproximación con tamaño de paso pequeño; entre los métodos de pasos múltiples, los tres estudiados proporcionan buenas aproximaciones con tamaño de paso más bien grande.

Consideraciones finales

Según Vaquero y Fernández de Chamigo (1987), enseñar es mucho más que dejar aprender. La enseñanza a de crear los estímulos que activen y aceleren el aprendizaje. El problema radical de la enseñanza es acoplar la mente del estudiante a la materia objeto de aprendizaje. Esto implica una enseñanza individualizada de forma que, dada una materia a enseñar, lo ideal es encontrar para cada individuo el transformador adecuado a su nivel de entendimiento y formación, que hiciese el acoplo más adecuado. En este sentido, esperamos haber contribuido a que los estudiantes logren la retención, la comprensión y el uso activo del conocimiento del contenido aprendido, aplicándolo a actividades que los lleven a comprometerse activamente durante su desarrollo. De esta forma, obtendrán una comprensión profunda de este tema específico, incrementando la habilidad para usar eficazmente los procesos cognitivos básicos -observar, analizar, formular conclusiones- y favoreciendo el desarrollo de actitudes y disposiciones asociadas con la reflexión.

La utilización de moodle como aula virtual para las actividades no presenciales, facilitó y agilizó el intercambio de opiniones entre docentes y estudiantes, favoreciendo a la compresión de cuestiones teóricas y prácticas y a la elaboración del proyecto final.

La presentación y discusión de los proyectos finales permitió aclarar dudas, llevó a una puesta en común de los contenidos temáticos abordados y de los trabajos propuestos.

Realmente creemos que las computadoras, un software matemático y los métodos numéricos proporcionan una alternativa para cálculos complejos, y son herramientas poderosas para la solución de problemas científicos y tecnológicos. Pero como afirman Mena Marchan y Porras (1994) y Rivera Porto (1997), son los educadores los que deben ocuparse de crear con estas herramientas un ambiente de aprendizaje que colabore con las tareas que les son propias y que favorezca el aprendizaje de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Alemán de Sánchez, A. (1999). *La enseñanza de la matemática asistida por computadora*. Universidad Tecnológica de Panamá. Recuperado el 09 de noviembre de 2011 de http://www.utp.ac.pa/articulos/enseñarmatematica.html

Ascheri, M. E., Pizarro, R. A. Culla, M. E. y Lee, M. Y. (2012). *Introducción al cálculo numérico de las ecuaciones diferenciales ordinarias*. Argentina: FCEyN.

Chapra, S, Canale, R. (2007). *Métodos Numéricos para Ingenieros*. México: Mc Graw Hill.

Edwards, C. H., JR y Penney, D. E. (1994). *Ecuaciones diferenciales elementales y problemas con condiciones en la frontera*. México: Prentice Hall Hispanoamericana.

Mathews, J. y Fink, K. (2000). *Métodos Numéricos con MATLAB*. España: Prentice Hall.

Maron, M. y López, R. (2006). *Análisis Numérico. Un enfoque Práctico*. México: Compañía Editorial Continental, S. A.

Mena Marchan, B. Y. y Porras, M. (1994). *Nuevas tecnologías para la Educación. Didáctica y metodología*. Madrid: De La Torre.

Rivera Porto, E. (1997). *Aprendizaje asistido por computadora, diseño y realización*. Puerto Rico: Publicaciones Puertorriqueñas. Recuperado el 15 de enero de 2012 de http://www.face.uc.edu.ve/~hrosario/CEM/AAC/index.html

Vaquero, A. y Fernández de Chamigo, C. (1987). *La informática aplicada a la enseñanza.* España: Eudema S.A.